www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

ANNÉE 1990

PREMIERE EPREUVE A OPTION (Durée : 3 heures - coefficient : 9)

MATHEMATIQUES

T - TA

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

On considère, dans un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté à un repère $\mathcal{R}$ orthonormé direct d'origine O, de vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, les quatre points U , A , B , C définis par leurs coordonnées : U(1, 1, 1) , A(a, a', a") , B(b, b', b") , C(c, c', c") .

On notera les vecteurs $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Pour tout point M de l'espace, on notera également M la colonne de ses trois coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$, et $\|\overrightarrow{OM}\|$ la norme euclidienne du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

On suppose dans tout le problème que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ varient en formant constamment une base orthonormée directe. Donc la matrice $\Omega = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a" & b" & c" \end{bmatrix}$ est une matrice orthogonale directe; et on a, par exemple, $\vec{a} \cdot \vec{b} \wedge \vec{c}$.

On associe au triplet de points (A, B, C) les trois quadriques Q_1 , Q_2 , Q_3 ayant respectivement pour équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$: $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$, $a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 1$, $a"x^2 + b"y^2 + c"z^2 = 1$.

On suppose enfin que les 3 quadriques Q_1 , Q_2 , Q_3 ont un point commun M_0 de coordonnées x_0 , y_0 , z_0 toutes trois positives ou nulles.

Soit Δ la droite passant par les points O et U , et $\prod$ le plan perpendiculaire à Δ en O .

1°/ a) Calculer x_0^2 , y_0^2 , z_0^2 en fonction des produits scalaires $\vec{a}.\vec{u}$, $\vec{b}.\vec{u}$ et $\vec{c}.\vec{u}$.

b) Sur quel morceau de surface doivent se trouver les points A , B , C pour que le point M_0 existe effectivement ? On suppose désormais cette condition satisfaite.

c) Soit alors P le point de coordonnées (x_0^2 , y_0^2 , z_0^2) dans le repère $\mathcal{R}$. Calculer $\|\overrightarrow{OP}\|$.

Quel est l'ensemble décrit par le point P lorsque les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ varient, la matrice Ω restant toujours orthogonale directe ?

T.S.V.P.

d) Quelle est la nature du triangle ABC ? Soit H son centre de gravité, exprimer la colonne H de ses coordonnées en fonction de la matrice Ω et de la colonne U . Quel est l'ensemble des points H ? On pourra limiter cet ensemble en comparant la somme des coordonnées de H à la somme des coordonnées de P .

2°/ On suppose dans cette question que le point M_0 , et donc le point P, sont situés sur Δ .

a) On pose $\overrightarrow{OP} = \lambda \vec{u}$, quel rôle joue alors le vecteur $\vec{u}$ (ou la colonne U) pour la matrice Ω ? Quelle est la valeur de λ ? Quel est le point M_0 ?

b) Déterminer dans ce cas la courbe Γ décrite par A , B , C , et l'équation du cône engendré par la droite OA . Quelle est la nature de ce cône ? Que peut-on dire du point H ?

c) En utilisant les positions respectives des points A , B , C sur Γ , discuter la nature des quadriques Q_1 , Q_2 , Q_3 . Quand sont-elles de révolution ? Préciser, dans ce cas, leurs axes de révolution. Quand sont-elles dégénérées ?

d) Montrer que les plans tangents en M_0 aux quadriques Q_1 , Q_2 , Q_3 sont orthogonaux deux à deux.

e) On se donne le point A sur Γ . Calculer, en fonction de a , a', a", les coordonnées de B et de C . Que peut-on en déduire pour les trois quadriques Q_1 , Q_2 , Q_3 ?

3°/ On suppose dans cette question que les plans tangents en M_0 aux quadriques Q_1 , Q_2 , Q_3 sont orthogonaux deux à deux, mais sans faire l'hypothèse que M_0 soit sur Δ .

a) Soient $\vec{v}$, $\vec{v}'$, $\vec{v}''$ les vecteurs de composantes respectives (a'a", b'b", c'c") , (a"a, b"b, c"c) et (aa', bb', cc') , comparer les directions de ces vecteurs à celles des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OP}$.

b) On suppose que $\overrightarrow{OP}$ n'est pas parallèle à $\vec{u}$. Que dire des directions de $\vec{v}$, $\vec{v}'$ et $\vec{v}''$? Montrer que dans ce cas, on a $abc = a'b'c' = a"b"c" = 0$.

c) En discutant alors les valeurs possibles des coefficients de Ω , montrer que dans tous les cas M_0 est sur Δ .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail